Es gelten
$$\mathbb{C}[\![X]\!] \subset \mathbb{C}[\![X]\!][Y] \subset \mathbb{C}[\![X,Y]\!]$$
und
$$\mathbb{C}[\![X]\!] \subset \mathbb{C}[\![X^{1/N}]\!] = \mathbb{C}[\![t]\!], \text{ mit } t = X^{1/N}.$$
Die Elemente sehen jeweils folgendermaßen aus:
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i \in \mathbb{C}[\![X]\!],$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i X^{i/N} \in \mathbb{C}[\![X^{1/N}]\!],$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i \in \mathbb{C}[\![t]\!].$$

Satz (Newton-Puiseux)**.** *Sei* $f(X,Y) = Y^d + a_1(X)Y^{d-1} + \ldots + a_d(X) \in \mathbb{C}[\![X]\!][Y]$, *dann existieren ein* $N \in \mathbb{N}$ *und Reihen* $b_1(t), \ldots, b_d(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]$ *so, dass*
$$f(t^N, Y) = \prod_{i=1}^{d} (Y - b_i(t)).$$

Beweis. Wir zeigen: Gilt $d > 1$, dann existieren ein $q \in \mathbb{N}$ und $g, h \in \mathbb{C}[\![t]\!][Y]$ mit $f(t^q, Y) = g(t,Y)h(t,Y)$, wobei $\mathrm{Grad}(g), \mathrm{Grad}(h) < d$.
Mit Induktion folgt dann die Aussage.
Seien $\varrho_i := \mathrm{Ord}(a_i(X))$, also $a_i(X) = X^{\varrho_i} \cdot u_i(X)$ mit $u_i(X)$ Einheit. Weiterhin definieren wir
$$\varrho := \min(\frac{\varrho_i}{i}) = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},$$
$t = X^{1/q} \iff X = t^q$. Setze $Y = Z \cdot t^p$ und setze dies in f ein:
$$\begin{aligned} f(t^q, Z \cdot t^p) &= (Z \cdot t^p)^d + a_1(t^q) Z^{d-1} t^{p(d-1)} + \ldots + a_d(t^q) \\ &= t^{pd}(Z^d + a_1(t^q)t^{-p} Z^{d-1} + a_2(t^q) t^{-2p} Z^{d-2} + \ldots + a_d(t^q) t^{-dp}). \end{aligned}$$

Es gilt:
$$\mathrm{Ord}_t(a_i(t^q) \cdot t^{-ip}) = \mathrm{Ord}_t(t^{\varrho_i q} \cdot u_i(t^q) \cdot t^{-ip}) = q\varrho_i - ip \begin{cases} \geq 0 \ \forall i \\ = 0 \text{ für mind. ein i.} \end{cases}$$
Also ist
$$f(t^q, Z \cdot t^p) = t^{pd} \cdot \tilde{f} \text{ mit } \tilde{f}(t,Z) = Z^d + \tilde{a}_1 \cdot Z^{d-1} + \ldots + \tilde{a}_d,\ \tilde{a}_i \in \mathbb{C}[\![t]\!];$$
$$\mathrm{Ord}(\tilde{a}_i) \geq 0; = 0 \text{ für mind. ein i.}$$
Somit gilt
$$\tilde{f}(0,Z) = Z^d + \tilde{a}_1(0) Z^{d-1} + \ldots + \tilde{a}_d(0) \in \mathbb{C}[Z] \text{ mit mind. ein } \tilde{a}_i \neq 0.$$
Wir finden also $g_0, h_0 \in \mathbb{C}[Z]$, sodass
$$\tilde{f}(0,Z) = g_0(Z) \cdot h_0(Z),\ \mathrm{ggT}(g_0, h_0) = 1.$$

Nach dem *Henselschen Lemma* existieren $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{C}[\![t]\!][Z]$, sodass

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t,Z) &= \tilde{g}(t,Z) \cdot \tilde{h}(t,Z), \text{mit} \\
\tilde{g}(0,Z) &= g_0(Z) \\
\tilde{h}(0,Z) &= h_0(Z).
\end{aligned}$$

Zurückschreiben in Y liefert die Behauptung. □

Bemerkung. *1. Die Reihen $b_1(t), \ldots, b_d(t)$ sind eindeutig und werden Wurzelreihen von f (bei 0) genannt.*
Bsp. 1:

$$\begin{aligned}
f &= Y^4 + X^2 \\
&= (Y^2 - X)(Y^2 + X) \\
&= \underbrace{(Y - X^{1/2})(Y + X^{1/2})(Y - iX^{1/2})(Y + iX^{1/2})}_{\textit{Wurzelreihen von } f}
\end{aligned}$$

$$C = V(f)$$

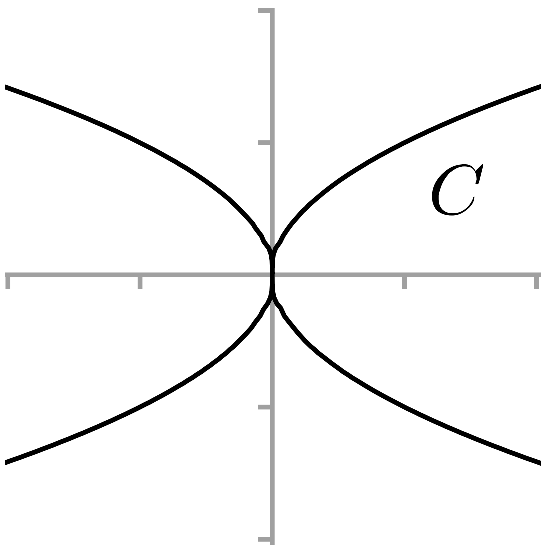

Abbildung 3.1: $C = V(Y^4 + X^2)$

Es gilt $\mathbb{C}[\![X]\!] \subset \mathbb{C}[\![X^{1/N}]\!] = \mathbb{C}[\![t]\!]$, mit $t = X^{1/N}$.
Die Gruppe $G := \mathbb{Z}/N$ operiert auf $\mathbb{C}[\![t]\!]$ durch φ:

$$t \overset{\varphi}{\mapsto} \zeta t, \zeta = e^{2\pi i/N}.$$

Eine Invariante unter φ ist $X = t^N$:
$$t^N \mapsto (\zeta t)^N = \zeta^N \cdot t^N = t^N.$$
Insgesamt gilt
$$\mathbb{C}[\![t]\!]^G = \{f = \sum a_i t^i | \varphi(f) = f\} = \mathbb{C}[\![X]\!].$$
Also erhalten wir für $f(X,Y) = \prod_{i=1}^d (Y - b_i(t))$, dass
$$f(X,Y) = \varphi(f(X,Y)) = \prod_{i=1}^d (Y - b_i(\zeta t))$$
und $b_i(\zeta t) = b_j(t)$ für ein gewisses j, da die $b_i(t)$ eindeutig sind.
G wirkt auf die Indizes $\{1, 2, \ldots, d\}$ und wir erhalten die G-Orbite $I_1, \ldots, I_r$ mit $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_r = \{1, \ldots, d\}$.
Die
$$f_i := \prod_{j \in I_i} (Y - b_j(t)) \ \in \mathbb{C}[\![X]\!][Y]$$
sind invariant unter φ; $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_r$, $f_i \in \mathbb{C}[\![X]\!][Y]$ irreduzibel.
Wir nennen $f_1, \ldots, f_r$ formale Zweige von f.
Im Beispiel sind $I_1 = \{1, 2\}, I_2 = \{3, 4\}$ und $f_1 = (Y^2 - X), f_2 = (Y^2 + X)$.

Bsp. 2:

$$f = X^5 + X^2Y^2 + Y^5$$

$$C = V(f)$$

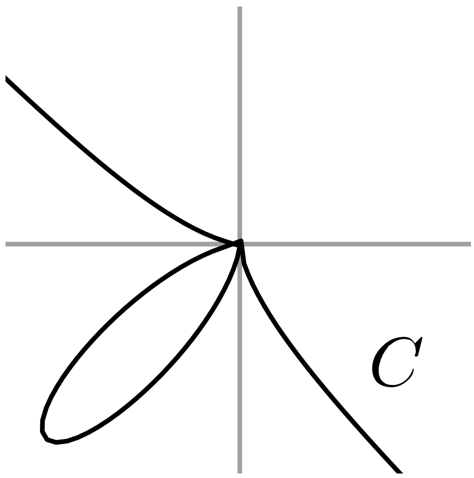

Abbildung 3.2: $C = V(X^5 + X^2Y^2 + Y^5)$

2. *Sei* $f = a_0(X)Y^d + a_1(X)Y^{d-1} + \ldots + a_d(X) \in \mathbb{C}[X][Y] \subset \mathbb{C}[\![X]\!][Y]$.
Teilung durch a_0 *ergibt:*

$$\tilde{f} = Y^d + \tilde{a}_1(X)Y^{d-1} + \ldots + \tilde{a}_d(X) \in \mathbb{C}[\![X]\!][\frac{1}{X}][Y].$$

Für solche Polynome gilt der Satz von Newton-Puiseux auch:
Sei $f \in \mathbb{C}[\![X]\!][\frac{1}{X}][Y]$, *dann existieren ein* $N \in \mathbb{N}$ *und Reihen* $b_i(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!][\frac{1}{t}]$ *mit*

$$f(t^N, Y) = \prod_{i=1}^{d}(Y - b_i(t)).$$

Der Beweis erfolgt analog.
Ein Newton-Diagramm für ein solches Polynom sähe dann zum Beispiel so aus:

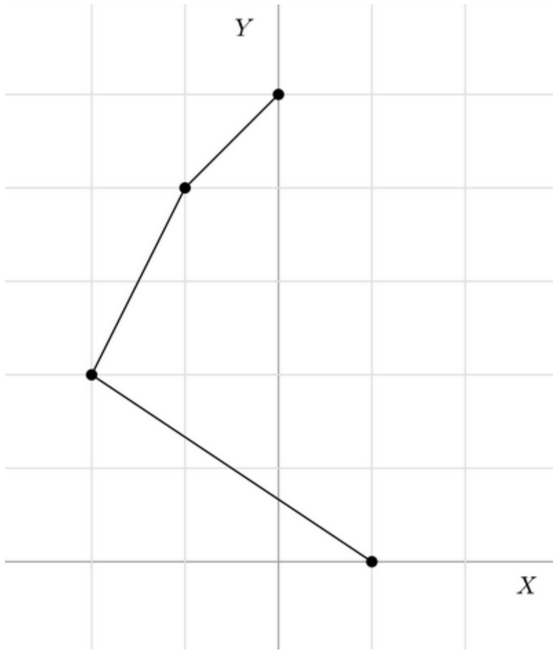

Abbildung 3.3: Newtondiagramm für ein Polynom aus $\mathbb{C}[\![X]\!][\frac{1}{X}][Y]$

Es sind

$$K := \mathbb{C}[\![X]\!][\frac{1}{X}] \qquad \text{Körper der Laurent-Reihen}$$
$$L := \bigcup_N \mathbb{C}[\![X^{1/N}]\!][\frac{1}{X^{1/N}}] \quad \text{Körper der Puiseux-Reihen.}$$

Die Elemente aus diesen Körpern sehen folgendermaßen aus:

$$\sum_{i>-M} a_i X^i \in K, \quad \sum_{i>-M} a_i X^{i/N} \in L.$$

L *ist der algebraische Abschluss von* K.

3.9 Potenzreihendefinition von Schnittmultiplizität

Seien C und D zwei Kurven mit endlich vielen Schnittpunkten, $\#(C \cap D) < \infty$, und $p \in C \cap D$ ein Schnittpunkt. Wir möchten die Schnittmultiplizität $I(C, D; p) \in \mathbb{N}$ bestimmen.
O.b.d.A. sei $p = 0$. Für $C = V(f)$ und $D = V(g)$ gelten dann $f(0) = g(0) = 0$.

Definition. *Wir definieren die Schnittmultiplizität*

$$I(C, D; 0) := dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\![X, Y]\!]/(f, g)),$$

wobei $(f, g) = \{Af + Bg | A, B \in \mathbb{C}[\![X, Y]\!]\}$ *das Ideal erzeugt von* f *und* g *aus* $\mathbb{C}[\![X, Y]\!]$ *ist.*

Beispiel.

1.

$$C = V(Y)$$
$$D = V(Y - X^3)$$

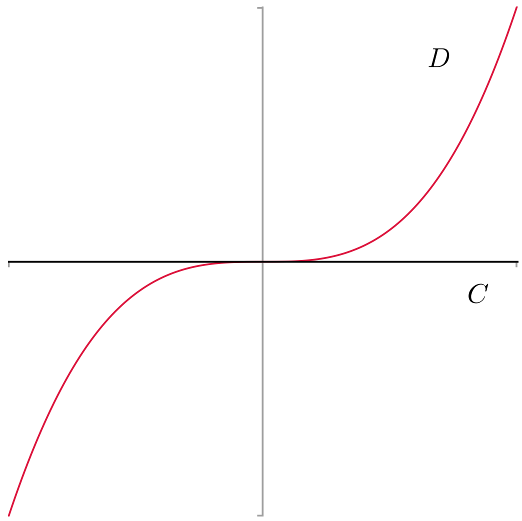

Abbildung 3.4: $C = V(Y)$, $D = V(Y - X^3)$

Es gilt $(Y, Y - X^3) = (Y, X^3)$. *Wir betrachten das Monomendiagramm:*

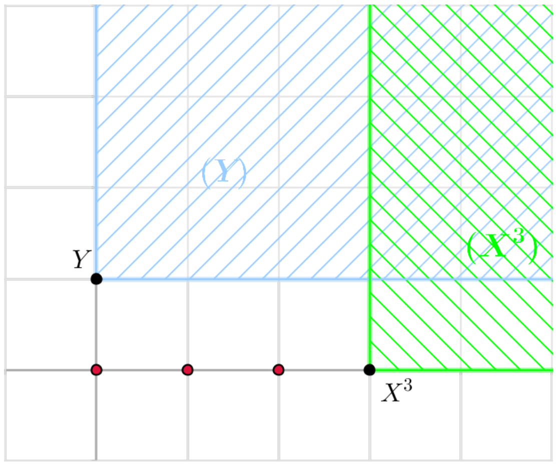

Abbildung 3.5: Monomendiagramm für $(Y, Y - X^3) = (Y, X^3)$

In der blau beziehungsweise grün schraffierten Fläche befinden sich alle Monome, die im Ideal (Y) beziehungsweise (X^3) liegen. Die roten Punkte weisen auf die Monome, die nicht im Ideal (Y, X^3) liegen. Wir erkennen

$$\mathbb{C}[\![X,Y]\!]/(Y, Y - X^3) = \mathbb{C}[\![X,Y]\!]/(Y, X^3) \simeq \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \mathbb{C} \cdot X \oplus \mathbb{C} \cdot X^2.$$

Also

$$I(C, D; 0) = dim(\mathbb{C}[\![X,Y]\!]/(Y, Y - X^3)) = 3.$$

2.

$$C = V(Y^2 - X^3)$$
$$D = V(Y^2 - 2X^3)$$

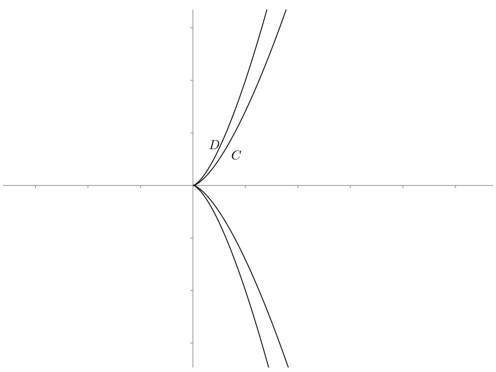

Abbildung 3.6: $C = V(Y^2 - X^3)$, $D = V(Y^2 - 2X^3)$

Hier gilt für $I := (Y^2 - X^3, Y^2 - 2X^3)$:

$$
\begin{aligned}
&(Y^2 - X^3) \in I,\ (Y^2 - 2X^3) \in I \\
&\Rightarrow (Y^2 - X^3) - (Y^2 - 2X^3) = X^3 \in I \\
&\Rightarrow Y^2 \in I
\end{aligned}
$$

Genauso sind $(Y^2 - X^3) \in (Y^2, X^3)$ *und* $(Y^2 - 2X^3) \in (Y^2, X^3)$.

$$\Rightarrow I = (Y^2 - X^3, Y^2 - 2X^3) = (Y^2, X^3).$$

Mit Hilfe des Monomendiagramms erkennen wir

$$\mathbb{C}[\![X, Y]\!]/(Y^2, X^3) = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \mathbb{C} \cdot X \oplus \mathbb{C} \cdot X^2 \oplus \mathbb{C} \cdot Y \oplus \mathbb{C} \cdot XY \oplus \mathbb{C} \cdot X^2Y.$$

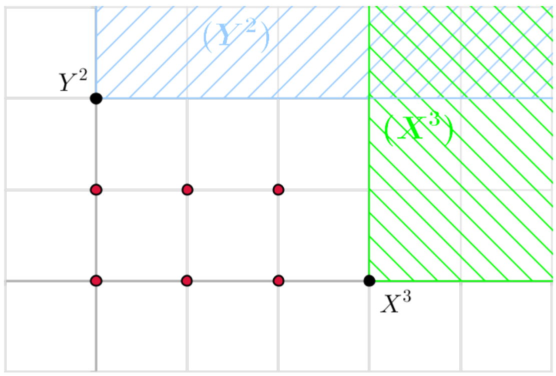

Abbildung 3.7: Monomendiagramm für $(Y^2 - X^3, Y^2 - 2X^3) = (Y^2, X^3)$

Also

$$I(C, D; 0) = dim(\mathbb{C}[\![X, Y]\!]/(Y^2 - X^3, Y^2 - 2X^3)) = 6.$$

3.

$$
\begin{aligned}
C &= V(X^2 - Y^3) = V(f) \\
D &= V(X^3 - Y^2) = V(g)
\end{aligned}
$$

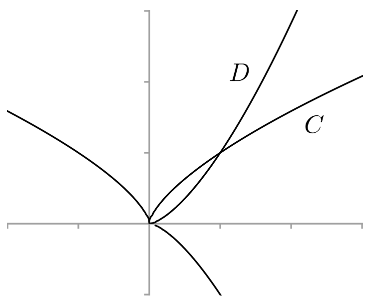

Abbildung 3.8: $C = V(X^2 - Y^3)$, $D = V(X^3 - Y^2)$

Sei $I = (f, g)$. Wir erhalten das Monomendiagramm:

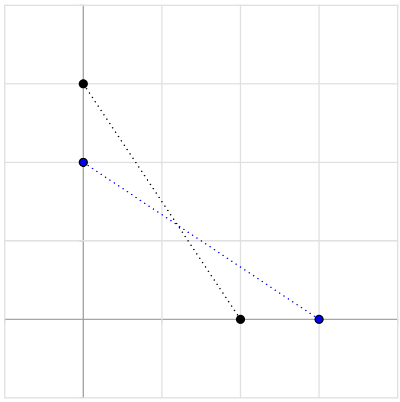

Abbildung 3.9: Monomendiagramm für $(X^2 - Y^3, X^3 - Y^2)$

Die Monome, die mit einem schwarzen beziehungsweise blauem Punkt markiert sind, liegen a priori nicht im Ideal. Die Linearkombinationen, die mit einer schwarz- beziehungsweise blau-gestrichelten Linie gekannzeichnet sind, liegen jedoch im Ideal.

Es gilt

$$\begin{aligned} Xf &= X^3 - XY^3 \in I \\ g &= X^3 - Y^2 \in I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Xf - g &= Y^2 - XY^3 \\ &= Y^2(1 - XY) \in I \end{aligned}$$

In $\mathbb{C}[\![X, Y]\!]$ ist $(1 - XY)$ eine Einheit,

$$\frac{1}{1 - XY} = 1 + XY + X^2Y^2 + \ldots \in \mathbb{C}[\![X, Y]\!].$$

Also ist

$$\frac{Xf - g}{(1 - XY)} = Y^2 \in I.$$

Aus $Y^2 \in I$ folgt $Y \cdot Y^2 = Y^3 \in I$ und damit auch $X^2 \in I$.
Umgekehrt sind $X^2 - Y^3 \in (X^2, Y^2)$ und $X^3 - Y^2 \in (X^2, Y^2)$

$$\Rightarrow I = (X^2 - Y^3, X^3 - Y^2) = (X^2, Y^2).$$

Wir sehen am Monomendiagramm

$$\mathbb{C}[\![X, Y]\!]/(X^2, Y^2) = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \mathbb{C} \cdot X \oplus \mathbb{C} \cdot Y \oplus \mathbb{C} \cdot XY;$$

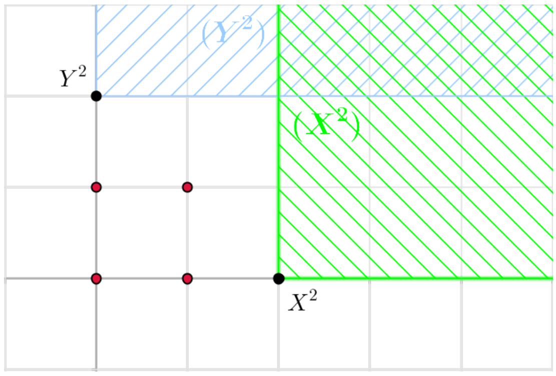

Abbildung 3.10: Monomendiagramm für $(X^2 - Y^3, X^3 - Y^2) = (X^2, Y^2)$

und damit

$$I(C, D; 0) = dim(\mathbb{C}[\![X, Y]\!]/(X^2, Y^2)) = 4.$$